

LAS TAREAS DE MATEMÁTICAS EN PISA 2012



Materiales
para docentes

INEE
Instituto Nacional para la
Evaluación de la Educación
México

LAS TAREAS DE MATEMÁTICAS EN PISA 2012



Materiales
para docentes

INEE
Instituto Nacional para la
Evaluación de la Educación
México

LAS TAREAS DE MATEMÁTICAS EN PISA 2012

Primera edición, 2014
ISBN: 978-607-7675-62-4

Coordinación

María Antonieta Díaz Gutiérrez
Salvador Saulés Estrada

Con la colaboración de
José Alfonso Jiménez Moreno
Revisión técnica de las observaciones a las respuestas:
Prof. Daniel Hernández Dávila, CECYTEM

D.R. © Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación

Barranca del Muerto 341, Col. San José Insurgentes,
Deleg. Benito Juárez, C.P. 03900, México, D.F.

Editora

María Norma Orduña Chávez

Corrección de estilo
Hugo Soto de la Vega

Diseño gráfico y formación
Martha Alfaro Aguilar

Impreso y hecho en México.
Distribución gratuita. Prohibida su venta.

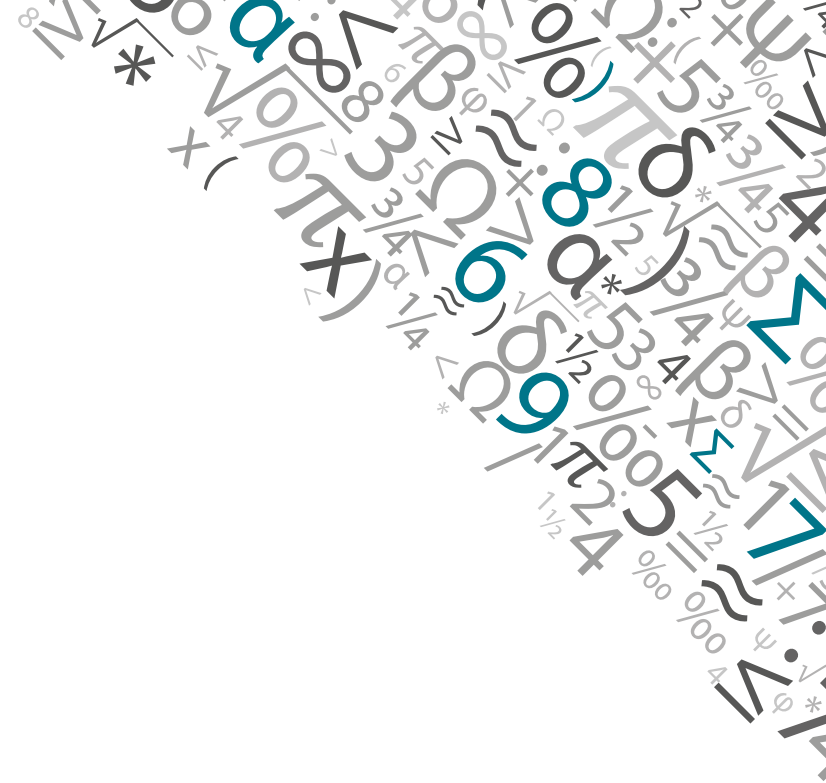
Consulte el Catálogo de publicaciones en línea:

www.inee.edu.mx

La elaboración de esta publicación estuvo a cargo de la
Dirección General de Difusión y Fomento de la Cultura de la Evaluación.

El contenido, la presentación, así como la disposición en conjunto
y de cada página de esta obra son propiedad del INEE. Se autoriza su
reproducción parcial o total por cualquier sistema mecánico o electrónico
para fines no comerciales y citando la fuente de la siguiente manera:

INEE (2014). *Las tareas de matemáticas en PISA 2012*.
México: INEE.



ÍNDICE

PRESENTACIÓN	5
I. LA COMPETENCIA MATEMÁTICA	9
Dimensiones	10
Contenidos.....	10
Procesos.....	11
Situaciones o contextos.....	12
II. REACTIVOS DE MATEMÁTICAS	15
Elena, la ciclista.....	16
Ascenso al monte Fuji.....	22
¿Cuál automóvil?.....	31
Cochera.....	36
BIBLIOGRAFÍA	47



PRESENTACIÓN

Esta obra tiene el propósito de ofrecer a los profesores de educación secundaria y media superior herramientas que los apoyen en su trabajo en el aula y les permitan aprovechar al máximo la información proporcionada por el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés).

En correspondencia con la línea de publicaciones dirigidas a los docentes, y una vez que los resultados de PISA 2012 —donde el área de énfasis fue matemáticas— se han dado a conocer, el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), a través de la Dirección de Evaluaciones Internacionales de Resultados Educativos (DEIRE), presenta *Las tareas de matemáticas en PISA 2012*, en donde se dan a conocer algunos de los reactivos liberados de esta área tal y como se aplicaron en México.

Lo relevante de este material es que incluye además una selección de respuestas de los estudiantes mexicanos a las preguntas abiertas, lo que permitirá al profesor identificar tanto los errores como los aciertos mostrados por ellos cuando se enfrentan a estas tareas de matemáticas. Esta información servirá a su vez al profesor como un referente más a la hora de focalizar, en los aspectos que lo requieran, los procesos de enseñanza-aprendizaje en su salón de clases.

Esta obra cuenta con dos antecedentes importantes. En el 2005, con la perspectiva de realizar materiales de apoyo para los profesores, el INEE publicó *PISA para docentes*. Al igual que ahora, también se presentaron algunos reactivos que fueron empleados en PISA 2000 y 2003. La publicación cumplió con el cometido de dar a conocer por primera vez preguntas de la prueba que podrían ser aprovechadas por los docentes.

Más adelante salió a la luz el reporte *México en PISA 2009*. En esta publicación, además de informarse sobre los resultados obtenidos por México y los demás países participantes en la prueba,

se incluyó un anexo con algunas de las preguntas de lectura liberadas por PISA, que fue el área de énfasis en dicho ciclo. Lo innovador fue la inclusión de ejemplos de respuestas de estudiantes mexicanos, ya que esto permitió que docentes e investigadores pudieran contar con mayores elementos para el análisis de los resultados en el área de lectura.

Con estos antecedentes, *Las tareas de matemáticas en PISA 2012* se organizan en dos apartados:

I. Una descripción del marco conceptual de la competencia matemática con sus distintas dimensiones (contenidos, procesos y situaciones). En este apartado el docente podrá conocer de manera detallada los distintos aspectos en los que se organizó esta área. No está demás decir que dicha información es indispensable para comprender el alcance conceptual de la prueba y de cada uno de los reactivos.

II. Los reactivos de matemáticas. Este apartado se conforma de la siguiente manera:

- Una clasificación general de las unidades de reactivos.¹
- El estímulo de la unidad junto con sus distintos reactivos.
- La ficha técnica de cada uno de los reactivos, que incluye el proceso y el contenido evaluados, así como su nivel de dificultad.
- Los comentarios elaborados por PISA para cada uno de los reactivos, pero adaptados por la DEIRE para los objetivos pedagógicos de esta obra. En ellos se reflexiona sobre los recursos cognitivos y de contenido que el estudiante debe movilizar para enfrentar de manera adecuada los requerimientos de la prueba.
- Al final de los comentarios se incluyen las claves con la opción correcta (en los reactivos de opción múltiple) y los distintos criterios para otorgarle o no algún crédito a las respuestas de los estudiantes en los reactivos abiertos.
- Algunos ejemplos de respuestas de estudiantes mexicanos para cada uno de los créditos posibles en los reactivos abiertos.
- Las observaciones sobre las respuestas emitidas por los estudiantes mexicanos para cada uno de los créditos otorgados.

Es importante mencionar que la selección que se presenta consideró el listado incluido en el informe internacional PISA 2012 (OECD, 2014). Los comentarios elaborados por PISA también están en este informe, al final de cada uno de los reactivos.

Además de los reactivos de opción múltiple, PISA integra reactivos de respuesta abierta o construida que los estudiantes deben contestar de forma escrita directamente en el cuadernillo de la prueba y que requieren del trabajo de distintos jueces o codificadores para otorgarles o no un crédito

1. La prueba se presenta a los estudiantes en unidades, compuestas por un estímulo y un conjunto de reactivos o preguntas, ya sea de opción múltiple o de respuesta abierta.

determinado, según criterios establecidos por el propio programa. En algunas de estas preguntas se solicita al estudiante mostrar sus operaciones y el procedimiento que siguió para obtener el resultado. En otras, los estudiantes mostraron sus operaciones y procedimiento aun cuando no se les había solicitado que lo hicieran, se debe precisar que en la prueba de matemáticas se permite el uso de calculadora.

Es conveniente tener en cuenta que las respuestas seleccionadas presentan las siguientes características:

- Se eligieron al azar, pero se buscó incluir (aunque no fue posible en todos los casos) cada uno de los niveles educativos que abarca la población evaluada por PISA (secundaria y bachillerato), en sus distintas modalidades.
- No son una muestra representativa de los estudiantes de quince años evaluados por PISA.
- Las respuestas se fotografiaron directamente de los cuadernillos, por ello las imágenes presentan distintos tamaños y cortes. El criterio fue copiar toda el área que pudiera proporcionar información acerca del procedimiento que se llevó a cabo para enfrentar la tarea solicitada. En algunos casos (por ejemplo en la respuesta A que aparece en la página 18), se puede observar parte de la pregunta, pues el estudiante comenzó a resolver la tarea desde ese momento.

No puede concluir esta presentación sin mencionar que las observaciones incluidas después de las respuestas de los estudiantes contaron con la revisión técnica del profesor Daniel Hernández Dávila, docente del área de matemáticas en el nivel medio superior (Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México), quien validó y agregó algunos elementos útiles para su mejor comprensión.

Con *Las tareas de matemáticas en PISA 2012*, el INEE, a través de la DEIRE, mantiene su propósito de proporcionar a los docentes materiales que los apoyen en la formación de estudiantes con sólidas competencias matemáticas. Dichas competencias no sólo ayudarán a los estudiantes a comprender la función que desempeña en el mundo esta importante área del conocimiento, sino sobre todo sentarán las bases para alcanzar uno de los fines últimos de la educación: lograr que el estudiante emita juicios fundamentados y tome las decisiones necesarias para ser un ciudadano reflexivo, constructivo y comprometido, tal y como se asienta claramente en la definición de competencia matemática que se presenta en el siguiente apartado.



I. LA COMPETENCIA MATEMÁTICA²

En un entorno cotidiano, los individuos se enfrentan a una serie de situaciones como comprar, viajar, ocuparse de su economía doméstica, cocinar, juzgar información de periódicos, interpretar estadísticas, entre otras. En dichas situaciones el empleo de razonamientos cuantitativos, espaciales y otras capacidades matemáticas contribuyen a aclarar, formular o resolver los problemas que se les plantean.

Estos usos de las matemáticas, que se basan en habilidades y conocimientos que fueron adquiridos y practicados en el medio escolar, exigen la capacidad de aplicar lo aprendido en contextos menos estructurados, que carecen de instrucciones precisas y en las que el individuo debe decidir cuál será el conocimiento más adecuado y cuál la forma más útil de aplicarlo.

Por ello PISA considera el área de matemáticas como una competencia fundamental para el desarrollo de los individuos, no sólo como un recurso instrumental, sino como una forma de razonamiento y pensamiento lógico que posibilita la capacidad de solucionar problemas y lograr un pensamiento abstracto.

Por ello, PISA define la competencia matemática como:

La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Esta competencia le

² La introducción y la definición de la competencia matemática que se incluye más adelante, se tomaron del reporte *México en PISA 2012* (INEE, 2013). Salvo algunas adaptaciones propias del contexto mexicano y ciertos agregados de organización, el resto del marco teórico fue tomado del *Informe español* (MECD, 2013), y se cotejó de igual forma la versión chilena (Agencia de Educación, 2013). La fuente original es *PISA 2012 Results* (OECD, 2014).

ayuda al individuo a reconocer la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y tomar decisiones necesarias en su vida diaria como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (citado en INEE 2013: 34).

Dimensiones

La competencia matemática comprende tres dimensiones: los contenidos, los procesos y las situaciones o contextos. A su vez, cada dimensión posee distintas categorías, como se detalla a continuación.

Dimensiones	Categorías
Contenidos	Cantidad Probabilidad Cambio y relaciones Espacio y forma
Procesos	Formular Emplear Interpretar
Situaciones	Personal Social Laboral Científica

Contenidos

Se refiere al tipo de tema abordado en los problemas y las tareas de matemáticas. Los contenidos se clasifican en cuatro: cantidad, probabilidad, cambio y relaciones, y espacio y forma.

Cantidad. Este contenido se refiere a la cuantificación de los atributos de los objetos, las relaciones, las situaciones y las formas del mundo, interpretando distintas representaciones de esas cuantificaciones y juzgando interpretaciones y argumentos basados en la cantidad. Participar en la cuantificación del mundo supone comprender las mediciones, los cálculos, las magnitudes, las unidades, los indicadores, el tamaño relativo, así como las tendencias y los patrones numéricos. Algunos aspectos del razonamiento cuantitativo son: el sentido de número, sus múltiples representaciones, el desarrollo de cálculos, el cálculo mental, la estimación y evaluación de la justificación de resultados.

Probabilidad. Es un contenido central del análisis matemático en muchas situaciones, por lo que se han desarrollado la teoría de la probabilidad y la estadística, así como las técnicas de representación y descripción de datos. Esta categoría incluye el reconocimiento del lugar de la variación en los procesos, la posesión de un sentido de cuantificación de esa variación, la admisión de incertidumbre y error en las mediciones, así como conocimientos sobre el azar. Asimismo, comprende la elaboración, interpretación y valoración de las conclusiones extraídas en situaciones donde la probabilidad y los datos son fundamentales. La presentación e interpretación de datos son conceptos clave en esta categoría.

Cambio y relaciones. El mundo natural y el artificial despliegan una variedad de relaciones temporales y permanentes entre los objetos y las situaciones, donde los cambios se producen dentro de los sistemas de objetos interrelacionados o en circunstancias donde los elementos se influyen mutuamente. Estos cambios ocurren diacrónicamente y sincrónicamente. Algunas de estas situaciones suponen un cambio discontinuo, otras, un cambio continuo; unas más son permanentes o invariables. Tener mayores conocimientos sobre el cambio y las relaciones supone comprender los tipos fundamentales de cambio y cuándo tienen lugar, con el fin de utilizar modelos matemáticos adecuados para describirlo y predecirlo. Desde un punto de vista matemático, esto implica modelar el cambio y las relaciones con las funciones y ecuaciones pertinentes, además de crear, interpretar y traducir las representaciones simbólicas y gráficas de las relaciones.

Espacio y forma. Esta categoría incluye una amplia gama de fenómenos que se encuentran en nuestro mundo visual y físico: patrones, propiedades de los objetos, posiciones y direcciones, representaciones de los objetos, decodificación y codificación de la información visual, navegación e interacción dinámica con formas reales y representaciones. PISA presupone que la comprensión de un conjunto de conceptos y destrezas básicas es importante para la competencia matemática en lo que respecta a espacio y forma. Por ello dicha competencia incluye una serie de actividades tales como la comprensión de la perspectiva (por ejemplo en los cuadros), la elaboración y lectura de mapas, la transformación de las formas con y sin tecnología, la interpretación de vistas de escenas tridimensionales desde distintas perspectivas y la construcción de representaciones de formas.

Procesos

Para resolver los problemas y las tareas matemáticas deben activarse ciertos procesos. Los estudiantes tienen que demostrar su dominio en tres procesos genéricos: 1) formular situaciones en el ámbito matemático, 2) emplear conceptos, datos, procedimientos y razonamiento matemático, y 3) interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos. A continuación se explicará brevemente los alcances de cada uno de ellos.³

Formular situaciones en el ámbito matemático. El término “formular” hace referencia a la capacidad del individuo de reconocer e identificar oportunidades para utilizar las matemáticas y, posteriormente, proporcionar la estructura matemática a un problema presentado de forma contextualizada. Este proceso incluye actividades como:

- Identificación de los aspectos matemáticos de un problema situado en un contexto del mundo real, e identificación de sus variables significativas.

³ Para información detallada, *vid.* OECD (2014).

- Reconocimiento de la estructura matemática (incluidas las regularidades, las relaciones y los patrones) en problemas o situaciones dadas.
- Simplificación de una situación o problema para que sea susceptible de análisis matemático.

Emplear conceptos, datos, procedimientos y razonamiento matemático. El término “emplear” hace referencia a la capacidad del individuo para aplicar conceptos, datos, procedimientos y razonamientos en la resolución de problemas formulados matemáticamente con el fin de llegar a conclusiones relacionadas con esta área. Este proceso incluye actividades tales como:

- Diseño e implementación de estrategias para encontrar soluciones matemáticas.
- Utilización de herramientas matemáticas, incluida la tecnología, que ayuden a encontrar soluciones exactas o aproximadas.
- Aplicación de datos, reglas, algoritmos y estructuras matemáticas en la búsqueda de soluciones.

Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos. El término “interpretar” se centra en la capacidad del individuo para reflexionar sobre soluciones, resultados o conclusiones matemáticas, e interpretarlas en el contexto de los problemas de la vida real. Este proceso incluye actividades tales como:

- Reinterpretación de un resultado matemático en el contexto del mundo real.
- Valoración de la razonabilidad de una solución matemática en el contexto de un problema del mundo real.
- Comprensión del modo en que el mundo real afecta los resultados y los cálculos de un procedimiento o modelo matemático para realizar juicios contextuales sobre la forma en que los resultados deben ajustarse o aplicarse.

Situaciones o contextos

Se refiere al área de la vida real en la cual se ubica el problema matemático. Las cuatro clases de situaciones son: personal, social, laboral o científica.

Personal. Los problemas clasificados en esta categoría se centran en actividades del propio individuo, su familia y su grupo de pares. Los tipos de contexto que pueden considerarse personales incluyen aquellos que implican la preparación de los alimentos, las compras, los juegos, la salud personal, el transporte personal, los deportes, los viajes, la planificación personal y las finanzas propias.

Social. Problemas clasificados en esta categoría se centran en la comunidad (ya sea local, nacional o global). Pueden incluir aspectos como los sistemas electorales, el transporte, el gobierno, las políticas públicas, la demografía, la publicidad, las estadísticas nacionales y la economía. Aunque los individuos están involucrados en todos estos aspectos en la categoría de contexto social los problemas ponen el acento en la perspectiva comunitaria.

Laboral. Esta categoría da cuenta de problemas que se centran en el mundo del trabajo. Las preguntas pueden incluir aspectos como la medición, el cálculo de costos, el pedido de materiales para la construcción, la nómina, la contabilidad, el control de calidad, la planificación, el inventario, el diseño, la arquitectura y la toma de decisiones relacionadas con el trabajo. Los contextos laborales pueden referirse a cualquier nivel de la mano de obra, desde el trabajador no especializado, hasta el profesional, aunque las preguntas del estudio PISA deben ser accesibles a los estudiantes de 15 años.

Científica. Forman parte de esta categoría aquellos problemas que refieren a la aplicación de las matemáticas al mundo natural y a cuestiones y temas relacionados con la ciencia y la tecnología. Los contextos concretos podrían incluir áreas como la meteorología o el clima, la ecología, la medicina, las ciencias espaciales, la genética, las mediciones y el propio mundo de las matemáticas.

La información descrita permite contextualizar al lector respecto de los elementos considerados en la evaluación de matemáticas de PISA, los cuales se ven reflejados en las unidades de reactivos que se muestran en el siguiente apartado.

II. REACTIVOS DE MATEMÁTICAS

Las unidades y sus preguntas se clasificaron de la siguiente manera:

Unidad	Reactivo	Formato	Proceso ⁴	Contenido	Contexto	Nivel	Puntaje ⁵
Elena la ciclista	1	Opción múltiple	Emplear	Cambio y relaciones	Personal	2	440.5
	2	Opción múltiple	Emplear	Cambio y relaciones	Personal	3	510.6
	3	Respuesta construida	Emplear	Cambio y relaciones	Personal	6	696.6
Ascenso al monte Fuji	1	Opción múltiple	Formular	Cantidad	Social	2	464
	2	Respuesta construida	Formular	Cambio y relaciones	Social	5	641.6
	3	Respuesta construida	Emplear	Cantidad	Social	5	610
¿Cuál automóvil?	1	Opción múltiple	Interpretar	Probabilidad	Personal	por debajo del nivel 1	327.8
	2	Opción múltiple	Emplear	Cantidad	Personal	3	490.9
	3	Respuesta construida	Emplear	Cantidad	Personal	4	552.6
Cochera	1	Opción múltiple	Interpretar	Espacio y forma	Laboral	1	419.6
	2	Respuesta construida	Emplear	Espacio y forma	Laboral	6	687.3

4 Las denominaciones completas de los procesos son las siguientes: *emplear* conceptos, datos, procedimientos y razonamiento matemático; *formular* situaciones en el ámbito matemático; e *interpretar*, aplicar y evaluar resultados matemáticos.

5 Para mayor información sobre los niveles de desempeño véase *México en PISA 2012*.

A continuación el lector podrá conocer el contenido de estas unidades. Para cada uno de los reactivos se proporciona una ficha técnica que incluye el proceso y el contenido evaluados, así como su nivel de dificultad. Adicionalmente, para el caso de los reactivos abiertos, se presentan ejemplos de respuestas de estudiantes mexicanos. Los ejemplos se clasificaron según los créditos asignados en cada reactivo. Por ejemplo, en algunos casos se presentan respuestas que obtienen crédito total, otras que alcanzaron crédito parcial y otras tantas que no pudieron obtener ningún crédito (es decir, respuestas no aceptables). Todo ello con el fin de que el lector pueda apreciar distintos tipos de respuestas en cada reactivo.

Elena, la ciclista



Elena acaba de comprar una bicicleta nueva. En el manubrio tiene un velocímetro. El velocímetro indica a Elena la distancia que recorre y su velocidad promedio en un viaje.

Pregunta 1. Elena, la ciclista

En un viaje, Elena recorrió 4 km en los primeros 10 minutos y luego 2 km en los siguientes 5 minutos.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- A. La velocidad promedio de Elena fue mayor en los primeros 10 minutos que en los 5 minutos siguientes.
- B. La velocidad promedio de Elena fue la misma en los primeros 10 minutos y en los 5 minutos siguientes.
- C. La velocidad promedio de Elena fue menor en los primeros 10 minutos que en los 5 minutos siguientes.
- D. No es posible decir nada sobre la velocidad promedio de Elena a partir de la información proporcionada.

Proceso	Contenido	Contexto	Nivel	Puntaje
Emplear	Cambio y relaciones	Personal	2	440.5



Comentario de PISA⁶

La pregunta 1 requiere comparar las velocidades alcanzadas cuando se recorren 4 km en 10 minutos y cuando se recorren 2 km en 5 minutos. Se necesita una precisa comprensión matemática de que la velocidad es una tasa (una relación entre dos magnitudes) y tener nociones de proporcionalidad. La pregunta se puede resolver utilizando una noción simple de proporción: para el doble de distancia se emplea el doble de tiempo (2 km a 4 km se recorren en 5 y 10 minutos, respectivamente). Los estudiantes que respondieron correctamente esta pregunta demuestran una comprensión básica de la velocidad, así como del cálculo de proporciones: si la distancia y el tiempo están en la misma proporción, la velocidad será la misma. No obstante, los estudiantes también pueden solucionar correctamente este problema de formas más complejas, por ejemplo, calculando las velocidades promedio de ambos recorridos (24 km/h).

Respuesta correcta: B. La velocidad promedio de Elena fue la misma en los primeros 10 minutos y en los 5 minutos siguientes.

Pregunta 2. Elena, la ciclista

Elena recorrió 6 km para ir a casa de su tía. Su velocímetro mostró que en todo el viaje su velocidad promedio fue de 18 km/h.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- A. Elena se tardó 20 minutos en ir a casa de su tía.
- B. Elena se tardó 30 minutos en ir a casa de su tía.
- C. Elena se tardó 3 horas en ir a casa de su tía.
- D. No es posible decir cuánto tiempo se tardó Elena en ir a casa de su tía.

Proceso	Contenido	Contexto	Nivel	Puntaje
Emplear	Cambio y relaciones	Personal	3	510.6

Comentario de PISA

La pregunta 2 se puede resolver simplemente con un razonamiento de proporcionalidad y con la comprensión del significado de la velocidad: 18 km se recorren en una hora, por lo tanto para una tercera parte de la distancia (6 km) el tiempo debe ser el tercio de una hora (20 minutos).

Respuesta correcta: A. Elena se tardó 20 minutos en ir a casa de su tía.

⁶ Estos comentarios fueron incluidos en *México en PISA 2012* y adaptados por la Dirección de Evaluaciones Internacionales de Resultados Educativos para los objetivos pedagógicos de esta obra.

Pregunta 3. Elena, la ciclista

Elena fue en bicicleta de su casa al río, que está a 4 km. Se tardó 9 minutos. Luego regresó a su casa y usó una ruta más corta, de 3 km. Sólo se tardó 6 minutos.

¿Cuál fue la velocidad promedio de Elena, en km/h, en el viaje al río, ida y vuelta?

Velocidad promedio del viaje: km/h

Proceso	Contenido	Contexto	Nivel	Puntaje
Emplear	Cambio y relaciones	Personal	6	696.6

Comentario de PISA

La pregunta 3 es abierta y requiere de una mayor comprensión del significado de la velocidad promedio, para ello es necesario relacionar el tiempo total empleado con la distancia total recorrida. La velocidad del viaje total no puede obtenerse promediando las velocidades de los dos recorridos (26.67 km/h y 30 km/h), aunque este promedio (28.3 km/h) sea cercano al de la respuesta correcta de 28 km/h. Si los estudiantes calculan el tiempo total utilizado en el viaje (9 + 6 = 15 minutos) y la distancia total recorrida (4 + 3 = 7 km), la respuesta puede obtenerse simplemente por un razonamiento proporcional (7 km en 15 minutos equivalen a 28 km en 1 hora), o mediante el uso de una fórmula más complicada, por ejemplo: distancia / tiempo = 7 / (15 / 60) = 420 / 15 = 28.

Para otorgarle crédito total a la respuesta, el estudiante debe contestar 28 km/h. Respuestas distintas a 28 no obtienen crédito. En el caso de que el estudiante conteste 28.3, la respuesta tampoco obtiene crédito por utilizar un método inadecuado para calcular el promedio de velocidad.

RESPUESTAS QUE OBTUVIERON CRÉDITO TOTAL

Ejemplos	Sexo y nivel educativo
<p>A</p> <p>¿Cuál fue la velocidad promedio de Elena, en km/h, en el viaje al río, ida y vuelta?</p> <p>Velocidad promedio del viaje:²⁸.....km/h</p> <p style="text-align: right;"> $\begin{array}{r} 7 \quad 15 \\ 14 \quad 30 \\ 28 \quad 60 \end{array}$ </p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Secundaria general
<p>B</p> <p>Velocidad promedio del viaje:²⁸..... km/h</p> <p> $\begin{array}{r} 4 \text{ km} \quad 9 \text{ min} \\ 3 \text{ km} \quad 6 \text{ min} \\ \hline 7 \text{ km} \quad 15 \text{ min} \\ \quad \quad .25 \text{ h} \end{array}$ </p> <p> $V = \frac{d}{t} \quad V = \frac{7 \text{ km}}{.25 \text{ h}} \quad V = 28 \text{ km/h}$ </p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Secundaria general

Ejemplos		Sexo y nivel educativo
C	Velocidad promedio del viaje: <u>28</u> km/h	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria técnica
D	<p>Velocidad promedio del viaje: <u>28</u> km/h</p> $\begin{array}{l} 4 \text{ km} - 9 \text{ min} \\ 3 \text{ km} - 6 \text{ min} \\ \hline 7 \text{ km} - 15 \text{ min} \end{array}$ $\begin{array}{l} 7 \text{ km} - 15 \text{ min} \\ X - 60 \text{ min} \\ \hline X = 28 \text{ km.} \end{array}$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria técnica
E	<p>Velocidad promedio del viaje: <u>28</u> km/h</p> $\begin{array}{l} 4 - 90 \text{ min} \\ ? - 60 \\ \hline 3 \text{ km} \end{array}$	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Telesecundaria
F	<p>Velocidad promedio del viaje: <u>28</u> km/h</p> $\begin{array}{l} 9 \text{ } 6 \text{ } 15 \text{ minutos} \\ 3 \text{ } 4 \text{ } 7 \text{ kilometros} \end{array}$	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato general
G	Velocidad promedio del viaje: <u>28</u> km/h	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato general
H	<p>Velocidad promedio del viaje: <u>28</u> km/h</p> $\begin{array}{l} 4 \text{ km} - 9 \text{ min} \\ 1 \text{ km} - 3 \text{ min} \\ \hline 7 = 15 \\ 14 = 30 \\ 21 = 45 \\ 28 = 60 \end{array}$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato tecnológico
I	Velocidad promedio del viaje: <u>28</u> km/h	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato tecnológico
J	Velocidad promedio del viaje: <u>28</u> km/h	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Profesional técnico
K	<p>Velocidad promedio del viaje: <u>28</u> km/h</p> $\frac{7 \text{ Km totales}}{15 \text{ minutos}} = 0.46 \text{ Km/minuto} \times 60$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato tecnológico

Observaciones a las respuestas que obtuvieron CRÉDITO TOTAL

Es conveniente anotar que en esta tarea no se le solicita al estudiante mostrar ni sus operaciones ni sus procedimientos para obtener el resultado. A pesar de ello, algunos estudiantes mostraron sus operaciones, lo que permite intuir el posible procedimiento utilizado para obtener el resultado.

En los ejemplos *A* y *H* se puede observar que el razonamiento de proporcionalidad, mencionado en el comentario de PISA, fue concretado con la elaboración de una tabla de datos en la que los estudiantes manejan como un total tanto el tiempo como la distancia. De las tablas se puede inferir que 7 km se recorren en un tiempo de 15 minutos, por lo tanto el patrón proporcional se repetirá para múltiplos de 7: 14 en 30, 21 en 45 y 28 en 60.

En la respuesta *F* sólo se hizo la separación de datos en la que se pone en claro que las distancias y el tiempo se suman. Y aunque no hay evidencia de que se usó el concepto de proporcionalidad, el resultado fue adecuado.

En otras respuestas se presenta una organización de datos eficiente y por demás ilustrativa, tanto de la información proporcionada en el reactivo, como de las operaciones realizadas. Particularmente, en *K* y en *B* se hizo un uso efectivo de la fórmula para la velocidad ($v = d / t$) y se realizó la respectiva sustitución de valores de manera adecuada. Además, en el ejemplo *B* se hizo una conversión previa de la que sólo se muestra el resultado (.25 h), y en seguida se calculó el cociente con el resultado correcto. En la respuesta *D* se empleó la denominada “regla de tres”; esto es, se hizo uso de la proporcionalidad entre razones iguales, y aunque sólo se tuvo un mínimo conflicto con las unidades (km/h), esta situación no disminuyó el crédito obtenido.

Estos ejemplos que obtuvieron crédito total muestran la variedad de estrategias que los alumnos utilizan para dar solución a los reactivos. Sin embargo, es importante destacar que la conceptualización de velocidad promedio, y de las unidades de medida y sus respectivas conversiones, son conocimientos fundamentales que el estudiante requiere dominar para realizar un manejo adecuado de los datos, lo que deriva en el planteamiento de una estrategia exitosa para la solución de esta tarea.

RESPUESTAS QUE NO OBTUVIERON CRÉDITO

Ejemplos		Sexo y nivel educativo
A	Velocidad promedio del viaje:15..... km/h	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Secundaria general
B	Velocidad promedio del viaje: km/h	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Secundaria general
C	Velocidad promedio del viaje:7..... km/h	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Secundaria técnica

Ejemplos		Sexo y nivel educativo
D	Velocidad promedio del viaje:7..... km/h	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Secundaria técnica
E	Velocidad promedio del viaje: ..30..... km/h	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Telesecundaria
F	Velocidad promedio del viaje:12..... km/h	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Bachillerato general
G	Velocidad promedio del viaje:27..... km/h $4 \text{ km} - 9 \text{ min}$ 60 min $\frac{(60 \text{ min})(4 \text{ km})}{9 \text{ min}} = 26.6$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Bachillerato general
H	Velocidad promedio del viaje:2..... km/h	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Bachillerato tecnológico
I	Velocidad promedio del viaje:3..... km/h	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Bachillerato tecnológico
J	Velocidad promedio del viaje:54..... km/h 36 18 54	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Profesional técnico
K	Velocidad promedio del viaje:15..... km/h	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Profesional técnico

Observaciones sobre las respuestas que NO OBTUVIERON CRÉDITO

Las respuestas seleccionadas que no obtuvieron crédito son, en su mayoría, cifras en las que aparentemente no se muestra algún elemento que permita intuir el procedimiento seguido. No obstante, en B, C y D, la respuesta es 7, lo que podría hacer pensar que en estos casos los estudiantes sólo sumaron las distancias. Situación semejante sucede con A y K, pues la respuesta de 15 es quizá la suma de los tiempos. Si así fuera, estas respuestas hacen suponer que el concepto de velocidad promedio está parcialmente entendido, y aun cuando estos estudiantes no alcanzaron a resolver la tarea de manera exitosa, los conocimientos demostrados pueden potencializarse con una guía adecuada.

En el ejemplo G se destaca el camino inadecuado, en términos procedimentales, para la obtención del promedio de velocidad de los dos tramos y, además, incompleto, pues se queda en el cálculo del primer tramo. Sin embargo, la respuesta hace patente que existe conocimiento del concepto de proporcionalidad, lo que puede ser aprovechado tanto en la elaboración de alguna estrategia para el manejo de los datos como en la conversión de unidades.

En J se aprecia una operación ($36 + 18 = 54$) que permite intuir que el estudiante no conoce la fórmula de la velocidad o que la interpretó de manera equivocada, pues, en lugar de obtener un cociente, hace un producto; esto es, multiplica la distancia por el tiempo en cada uno de los tramos, y al final suma los totales (un error adicional, pues no obtuvo el promedio sino la suma total).

Estos ejemplos dejan entrever ciertas conceptualizaciones que poseen los estudiantes que pueden ser aprovechadas por los docentes para enfocar de manera adecuada sus estrategias de intervención.

Ascenso al monte Fuji



El monte Fuji es un famoso volcán inactivo de Japón.

Pregunta 1. Ascenso al monte Fuji

El monte Fuji sólo está abierto al público del 1° de julio al 27 de agosto de cada año. Alrededor de 200,000 personas escalan el monte Fuji en este periodo.

¿Cuántas personas en promedio escalan el Monte Fuji cada día aproximadamente?

- A. 340
- B. 710
- C. 3,400
- D. 7,100
- E. 7,3400

Proceso	Contenido	Contexto	Nivel	Puntaje
Formular	Cantidad	Social	2	464

Comentario de PISA

La pregunta 1 requiere calcular primero el número de días en los que el recorrido está abierto (haciendo uso de los datos proporcionados en el texto) y luego calcular el promedio de personas que escalan el monte. Se requiere utilizar la fórmula para el promedio, lo cual implica el uso de una relación para encontrar la cantidad de gente por día.

Respuesta correcta: C. 3,400



Pregunta 2. Ascenso al monte Fuji

El sendero Gotemba, que sube por el Monte Fuji, mide alrededor de 9 kilómetros (km) de largo. Los visitantes deben regresar de la caminata de 18 km a más tardar a las 8 p.m. Toshi calcula que puede subir a la montaña a un promedio de 1.5 kilómetros por hora, y bajar al doble de velocidad. Estas velocidades toman en cuenta los tiempos para comer y descansar.

Utilizando las velocidades calculadas por Toshi, ¿a qué hora es lo más tarde que puede comenzar su caminata para que pueda regresar a más tardar a las 8 p.m.?

Proceso	Contenido	Contexto	Nivel	Puntaje
Formular	Cambio y relaciones	Social	5	641.6

Comentario de PISA

La pregunta 2 requiere cuantificar el tiempo para subir y para descender a partir de la información proporcionada sobre distancias y velocidades; además se debe combinar esta información con el tiempo límite para comenzar el recorrido. La pregunta posee cierta complejidad porque su estructura matemática involucra múltiples relaciones que el estudiante debe realizar para contestarla: tiempo de inicio = tiempo final – duración; duración = tiempo para subir + tiempo de descenso; tiempo para subir (o para descender) = distancia / velocidad (o su equivalente razonamiento proporcional); tiempo para descender = la mitad del tiempo para subir. Todo ello considerando los supuestos de que la velocidad promedio incluye los tiempos para comer y para descansar.

Para otorgarle crédito total a la respuesta, el estudiante debe contestar 11 a.m. (con o sin “a.m.”, o una forma equivalente de escribir esta hora). Respuestas distintas no obtienen crédito.

RESPUESTAS QUE OBTUVIERON CRÉDITO TOTAL

Ejemplos	Sexo y nivel educativo
<p>A</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Secundaria general
<p>B</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Secundaria general

	Ejemplos	Sexo y nivel educativo
C	A las 11:00 a.m.	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria técnica
D	$9 \div 1.5 = 6$ $9 \div 3 = 3$ $6 + 3 = 9$ a las 11 a.m.	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Telesecundaria
E	a las 11:00 AM	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato general
F	$9 \div 1.5 = 6$ $9 \div 3 = 3$ $6 + 3 = 9$ el debe de empezar a las 11 am	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato general
G	$9 \div 1.5 = 6$ horas de subida + $9 \div 3 = 3$ horas de bajada $6 + 3 = 9$ horas en total a las 11:00 am	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato tecnológico
H	$11:00 \text{ am} = 1.5 \text{ km} \times 6 \text{ hrs} = 9 \text{ km} + 3 \text{ km} \times 3 = 9 \text{ km} = 18 \text{ km}$	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Profesional técnico
I	aprox. a las 11 am	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Profesional técnico

Observaciones sobre las respuestas que obtuvieron CRÉDITO TOTAL

Es conveniente anotar que en esta tarea tampoco se solicita al estudiante que muestre ni sus operaciones ni sus procedimientos para obtener el resultado. Sin embargo, algunos de estos ejemplos de respuesta se caracterizan por utilizar elementos gráficos para organizar la información proporcionada, y otros, por incluir sus operaciones. Los procedimientos gráficos (uso de flechas, círculos, subrayados, señalizaciones, etcétera) son un recurso que los estudiantes pueden utilizar como estrategia para hallar la solución a la tarea matemática. No son el único camino, pues otros ejemplos evidencian un uso exclusivo de las operaciones adecuadas para encontrar la hora solicitada.

En particular, la respuesta A muestra un proceso de solución que permite distinguir distintas etapas de razonamiento. Primero, un acomodo de la información en donde se extraen y ordenan los datos, y después una etapa de cálculo. En esta última, el estudiante no muestra evidencia con la que se pudiera intuir su procedimiento para la obtención de los tiempos. Sin embargo, como emplea el producto ($d = v \cdot t$) en lugar de utilizar el cociente ($t = d / v$), está comprobando que, para velocidades distintas, con los tiempos de 6 y 3 horas, se recorren las distancias que indica con las flechas. Después realiza la suma de las horas para obtener el tiempo de la caminata y de ahí salta al resultado sin mostrar qué es lo que le condujo a dar esa respuesta.

La estrategia que se emplea en las respuestas B y D, una serie numérica de la escala horaria que va de la 1 a las 12 horas, permitió a los estudiantes hacer un conteo del tiempo empleado en la caminata e indicar la hora máxima de inicio. En B se observa, sobre todo, una traducción del lenguaje común al lenguaje matemático, al detallar los tiempos de ascenso y descenso de forma muy gráfica.

En F, G y H, se recurre a calcular los tiempos con el cociente ($t = d / v$). En estos ejemplos, como también sucede en A, los cálculos que realizan los estudiantes los llevan a determinar el tiempo total y de ahí pasan a escribir el resultado. Se podría suponer que están recurriendo al cálculo mental o quizá al uso de la calculadora por lo que no anotan el procedimiento.

RESPUESTAS QUE NO OBTUVIERON CRÉDITO

	Ejemplos	Sexo y nivel educativo
A	3:00 pm para llegar a la caminata	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria general
B	más tardar a las 9:00 am	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Secundaria general
C	A las 2 pm	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Secundaria técnica
D	3 pm	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Secundaria técnica
E	Subir 12 km de subida y bajada	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Telesecundaria
F	$1.5\sqrt{18} = 12h + (2V) \times (T) = 3.5 \times 1 = 6 \text{ horas}$ $12 + 6 = 18$ Tiene que empezar a más tarde a la 9 AM para que regresen a la 8 PM.	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato general
G	lo más tarde que puede irse sería a las 6:00 pm y regresar a las 8:00 pm $9 \text{ km} \cdot 1.5 \text{ km/h} = 7.5 \times 60 = 450 \text{ min} \pm 30 \text{ min}$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato general
H	$R = 3.375$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato tecnológico
I	8:05 PM	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato tecnológico
J	empezar a las 9:00 am	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Profesional técnico
K	7:00 pm	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Profesional técnico

Ejemplos		Sexo y nivel educativo
L	<p>El sendero Gotemba, que sube por el Monte Fuji, mide alrededor de 9 kilómetros (km) de largo.</p> <p>Los visitantes deben regresar de la caminata de 18 km a más tardar a las 8 p.m.</p> <p>Toshi calcula que puede subir a la montaña a un promedio de 1.5 kilómetros por hora, y bajar al doble de velocidad. Estas velocidades toman en cuenta los tiempos para comer y descansar.</p> <p>Utilizando las velocidades calculadas por Toshi, ¿a qué hora es lo más tarde que puede comenzar su caminata para que pueda regresar a más tardar a las 8 p.m.?</p> <p><i>12-h</i> <i>6-h</i></p> <p><i>a las 12:00 del día</i> <i>8-9</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato general
M	<p><i>a las 12:00 del día porque se recorrió tardara 9 horas.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato general

Observaciones sobre las respuestas que NO OBTUVIERON CRÉDITO

Una característica general de estas respuestas es que la mayoría no muestra ni sus operaciones ni sus procedimientos para obtener el resultado. Sin bien sólo se solicita la hora más tardía en que se debe comenzar la caminata, el hecho de mostrar el dato podría sugerir cierta incomprensión en los niveles de conceptualización del problema desde la información proporcionada. Las respuestas son tan variables que se ubican en un rango de 18 a 1 hora antes del límite para el regreso.

En B y J se observan respuestas iguales, y en L y M el procedimiento es adecuado para llegar a una parte de la solución (las 9 horas que dura el recorrido); sin embargo, no llegan a concretar la hora de salida. Se podría inferir que conceptualmente existe un conflicto entre diferenciar un lapso de tiempo y ubicar, en una hora específica, el tiempo transcurrido. Esto podría ocurrir quizá por el reto que implica hacer una cuenta regresiva con la escala horaria de 12 horas, ya que después de llegar a la 1 la serie se repite.

Pregunta 3. Ascenso al monte Fuji

Toshi utilizó un podómetro para contar sus pasos al caminar por el sendero Gotemba. Su podómetro mostró que dio 22,500 pasos en la subida.

Calcula la longitud promedio de los pasos de Toshi para su caminata de 9 km al subir por el sendero Gotemba. Tu respuesta debe estar en centímetros (cm).

Respuesta: cm

Proceso	Contenido	Contexto	Nivel	Puntaje
Emplear	Cantidad	Social	5	610

Comentario de PISA

La pregunta 3 requiere utilizar la siguiente fórmula: la distancia recorrida = número de pasos x longitud promedio de los pasos. El hacer uso de esta fórmula para solucionar el problema implica dos cuestiones: una apropiada conversión de unidades (km y cm) y el reordenamiento de la fórmula (lo que probablemente hagan

los estudiantes de manera informal, más que escribir de manera formal la relación entre variables), con el fin de que la longitud promedio de los pasos pueda generarse mediante el uso de la distancia recorrida y el número de pasos.

Las respuestas a esta pregunta pueden recibir crédito total, parcial o no obtener crédito. Para obtener crédito total, el estudiante debe contestar 40 cm. Respuestas que muestren una conversión incorrecta, por ejemplo 4 000 o que fueron dadas en metros (0.4), obtienen crédito parcial. Otras respuestas no obtienen crédito.

RESPUESTAS QUE OBTUVIERON CRÉDITO TOTAL

	Ejemplos	Sexo y nivel educativo
A	Respuesta: 40.00 cm $22,500$ $900,000$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria general
B	Respuesta: 40 cm	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Secundaria general
C	Respuesta: 40 cm	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Secundaria técnica
D	Respuesta: 40 cm $9 \text{ km} = 900,000$ $900,000 \div 22,500 = 40$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria técnica
E	Respuesta: 40 cm	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Telesecundaria
F	Respuesta: 40 cm $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ $9 \text{ km} = 9000 \text{ m}$ $9000 \text{ m} = 900,000 \text{ cm}$ $900,000 \div 22,500 =$ 40 cm	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato general
G	Respuesta: 40 cm $1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 100,000 \text{ cm}$ $900,000 \text{ cm}$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato general
H	Respuesta: 40 cm	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato tecnológico
I	Respuesta: 40 cm	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato tecnológico
J	Respuesta: 40 cm	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Profesional técnico

Observaciones sobre las respuestas que obtuvieron CRÉDITO TOTAL

En algunos de estos ejemplos (D, F, G), se muestra una correcta aplicación de conversiones y operaciones. En ellos se emplea de forma indirecta la fórmula para obtener la longitud promedio de los pasos (distancia recorrida / número de pasos). Se puede adquirir más información de los resultados que obtuvieron crédito parcial o que no obtuvieron crédito alguno.

RESPUESTAS QUE OBTUVIERON CRÉDITO PARCIAL

Ejemplos		Sexo y nivel educativo
A	Respuesta: 0.0004 cm	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria general
B	Respuesta: 0.04 cm	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria general
C	Respuesta: 0.4cm cm	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Secundaria técnica
D	Respuesta: 0.4 cm	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria técnica
E	Respuesta: 4 cm	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Telesecundaria
F	Respuesta: 0.4 cm por paso cm	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato general
G	Respuesta: 0.4 cm	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato general
H	Respuesta: 4 cm	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato tecnológico
I	Respuesta: 0.04 cm	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato tecnológico
J	<p>Su podómetro mostró que dio 22,500 pasos en la subida.</p> <p>Calcula la longitud promedio de los pasos de Toshi para su caminata de 9 km al subir por el sendero Gotemba. Tu respuesta debe estar en centímetros (cm).</p> <p>Respuesta: 4 cm cm</p> <p>22,500 9000</p>	<p>8.25</p> <ul style="list-style-type: none"> Mujer Profesional técnico

Observaciones sobre las respuestas que obtuvieron CRÉDITO PARCIAL

Como se mencionó anteriormente, el crédito parcial se otorga tanto a las respuestas dadas en metros como a las que evidencian una conversión inadecuada. En alguno de los comentarios a otros

reactivos, PISA menciona que a los 15 años de edad muchos estudiantes todavía poseen una concepción errónea de los números decimales. Estos ejemplos son evidencia de ello.

Nótese que para los ejemplos C, D, F y G, el resultado es 0.4 cm, esto da cuenta de que los alumnos, conceptualmente, tienen comprendida la razón distancia recorrida / número de pasos, lo que los lleva a realizar el siguiente cálculo: $9000 / 22500 = 0.4$, asumiendo ellos que el resultado está dado en centímetros al colocarlo en la casilla correspondiente. Se destaca que los alumnos están haciendo una primera conversión, de kilómetros a metros, no obstante pasan por alto la conversión de metros a centímetros.

Para los casos E, H y J, la conversión presenta dificultades conceptuales, ya que asume que 9 km son 90000 cm, por ello sus operaciones conducen a obtener 4 con el consiguiente error en sus unidades. En tanto que para los ejemplos B e I, los alumnos infieren que 9 km equivalen a 900 cm, así sus resultados arrojan 0.04 cm. Finalmente, el ejemplo A no hace la conversión y emplea directamente 9 km en la división.

Estos ejemplos son interesantes dadas las diferentes formas en que los alumnos conciben la conversión de unidades de longitud. Como estrategia didáctica se puede cuestionar a los alumnos, con ejercicios en el aula de esta naturaleza, si las soluciones dadas representan un resultado coherente.

RESPUESTAS QUE NO OBTUVIERON CRÉDITO

	Ejemplos	Sexo y nivel educativo
A	Respuesta:0.954242509..... cm	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Secundaria general
B	Respuesta:4.4444..... cm $1 \text{ km} = 100000 \text{ cm}$ $22500 \text{ pasos} = 100000$ $1 \text{ paso} = x$ $x = \frac{1(100000)}{22500}$ $x = \frac{100000}{22500}$ $x = 4.4444 \text{ cm}$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Secundaria general
C	Respuesta:35..... cm	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Secundaria técnica
D	Respuesta:22.500..... cm	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Secundaria técnica
E	Calcula la longitud promedio de los pasos de Toshi para su caminata de 9 km al subir por el sendero Golembe. Tu respuesta debe estar en centímetros (cm). Respuesta:202500..... cm $\frac{9000}{22500} = 0.4$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Telesecundaria

Ejemplos		Sexo y nivel educativo
F	Respuesta: 202.9 cm	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Bachillerato general
G	Respuesta: 2.5 cm	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Bachillerato general
H	Respuesta: 2500 cm	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Bachillerato tecnológico
I	Respuesta: 2500 cm 22500 - 9 km	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Bachillerato tecnológico
J	Respuesta: 2500000 cm	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Profesional técnico
K	Respuesta: 90 cm	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Profesional técnico

Observaciones sobre las respuestas que NO OBTUVIERON CRÉDITO

En algunos de estos ejemplos se constata que parte de las soluciones inadecuadas a un problema matemático se vinculan con dejar un procedimiento sin concluir. Tal es el caso de la respuesta B en la que se obtiene un resultado preciso, con el procedimiento detallado de manera esmerada, pero de los pasos realizados en un solo kilómetro y no en los nueve que dura el recorrido.

En los ejemplos H e I, el resultado (2500) es producto de una concepción errónea de la relación (distancia recorrida / número de pasos), porque los estudiantes invierten esta relación para dar con dicho resultado. Nótese además que en estos casos se pasa por alto la conversión de unidades.

Algo similar pasa con C y G, en donde se observa que se invierte la relación mencionada, no obstante los alumnos tienen la precaución de hacer la conversión de kilómetros a metros, su resultado (2.5) se obtiene de la razón 22500 / 9000. En el ejemplo J también se observa el mismo error de planteamiento, recurrente en los ejercicios antes mencionados, en este caso se presenta además un error en la conversión ($9 / 1000 = 0.009$); lo que lleva a dividir $22500 / 0.009 = 2500000$.

Para el ejemplo B, es interesante observar que el contenido procedimental de su solución es correcto, ya que aplica bien la relación de variables como una proporcionalidad, como se prevé en el comentario de PISA. Su conversión de kilómetros a centímetros es correcta ($1 \times 1000 \times 100 = 100000$), el detalle del error en el cálculo está en que pasa por alto multiplicar por nueve.

No menos interesante resulta el ejemplo E. En este caso el alumno comete un error en la relación de variables, ya que las organiza de la siguiente forma: distancia recorrida x número de pasos = $22500 \times 9 = 202500$.



¿Cuál automóvil?

Carla acaba de recibir su licencia de conducir y quiere comprar su primer automóvil.

La tabla siguiente muestra los detalles de cuatro automóviles que encuentra en una agencia automotriz.

Modelo	Alfa	Bolta	Caste	Delos
Año	2003	2000	2001	1999
Precio anunciado (zeds)	4,800	4,450	4,250	3,990
Kilometraje (kilómetros)	105,000	115,000	128,000	109,000
Cilindraje (litros)	1.79	1.796	1.82	1.783



Pregunta 1. ¿Cuál automóvil?

Carla quiere un automóvil que cumpla con *todas* estas condiciones:

- Que el kilometraje *no* sea mayor a 120,000 kilómetros.
- Que lo hayan fabricado en el año 2000 o en un año posterior.
- Que el precio anunciado *no* sea más de 4,500 zeds.

¿Cuál automóvil cumple con las condiciones de Carla?

- A. Alfa
- B. Bolta
- C. Caste
- D. Delos

Proceso	Contenido	Contexto	Nivel	Puntaje
Interpretar	Probabilidad	Personal	por debajo del nivel 1	327.8

Comentario de PISA

La pregunta 1 requiere manejar la lectura convencional dentro de una tabla (fila-columna), así como la habilidad para el manejo de gran cantidad de datos que le permita al estudiante identificar en dónde se satisfacen de manera simultánea las tres condiciones mencionadas.

Respuesta correcta: B. Bolta

Pregunta 2. ¿Cuál automóvil?

¿Cuál automóvil tiene el cilindraje más pequeño?

- A. Alfa
- B. Bolta
- C. Caste
- D. Delos

Proceso	Contenido	Contexto	Nivel	Puntaje
Emplear	Cantidad	Personal	3	490.9

Comentario de PISA

La dificultad de la pregunta 2 radica en que muchos estudiantes a la edad de quince años poseen una concepción errónea del sistema decimal y del valor posicional que se requiere conocer para ordenar números decimales “desiguales”, como sucede en este caso.

Respuesta correcta: D. Delos

Pregunta 3. ¿Cuál automóvil?

Carla tendrá que pagar además 2.5% del precio anunciado del automóvil para impuestos.

¿De cuánto son los impuestos por el Alfa?

Impuestos en zeds:

Proceso	Contenido	Contexto	Nivel	Puntaje
Emplear	Cantidad	Personal	4	552.6

Comentario de PISA

En la pregunta 3 se requiere que el estudiante realice el cálculo de un porcentaje (2.5%) del precio anunciado (4 800 zeds) de un auto.

Para obtener crédito total, el estudiante debe contestar 120. Otras respuestas no obtienen crédito, a pesar de que, por ejemplo, se enuncie la operación (2.5% de 4 800 zeds) pero no se efectúe para lograr el resultado.

RESPUESTAS QUE OBTUVIERON CRÉDITO TOTAL

Ejemplos		Sexo y nivel educativo
A	Impuestos en zeds:120 zeds $4800 \times 2.5 = 12000$ $100 \div 12000 = 120$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria general
B	¿De cuánto son los impuestos por el Alfa? Impuestos en zeds:120..... $4800 - 100 = 4700$ $\frac{4700}{2.5} = 1880$ $4800 \times 2.5 \div 100 = 120$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria general
C	Impuestos en zeds:120.....	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Secundaria técnica
D	Impuestos en zeds:120 zeds..... $100\% = 4,800$ $2.5\% = x$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria técnica
E	Impuestos en zeds:120 zeds.....	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Telesecundaria
F	Impuestos en zeds:120.....	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato general
G	Impuestos en zeds:120 zeds..... $4,800 \times .025 = 120$	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato general
H	¿De cuánto son los impuestos por el Alfa? $4800 - 2.5 = 4797.5$ $\frac{4797.5 \times 2.5}{12000} = 100$ $400 \overline{) 12000}$ $\begin{array}{r} 120 \\ 60 \\ 00 \end{array}$ Impuestos en zeds:120.....	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato tecnológico
I	Impuestos en zeds:120 zeds..... $4800 \div 100 = 48$ $48 \times 2.5 = 120$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato tecnológico
J	Impuestos en zeds: $2.5 \times 4800 \div 100 = 120$ zeds.....	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Profesional técnico
K	Impuestos en zeds:120..... $100\% = 4800$ $2.5\% = 120$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Profesional técnico

Observaciones sobre las respuestas que obtuvieron CRÉDITO TOTAL

Las operaciones mostradas en las respuestas B, D e I, permiten deducir que los estudiantes utilizaron como estrategia la aplicación de la regla de tres para establecer la proporcionalidad y, en consecuencia, el porcentaje solicitado.

En A se observa un error de planteamiento en la razón $100 / 1200$, ya que de esa manera es claro que el resultado debe ser $0.008333\dots$, no obstante escribe 120, que resulta de dividir de forma invertida la razón mostrada. En el ejemplo J, muy similar al ejemplo B, se nota la escritura del algoritmo $4800 \times 2.5 / 100$, que, por su mismo nivel jerárquico de operaciones, hace suponer que la tarea no representa mayor dificultad para estos estudiantes. En G se muestra una respuesta en la que el alumno ya resolvió conceptualmente el 2.5% y lo ha traducido a su valor decimal, 0.025. Finalmente en H se establece el algoritmo $4800 \times 2.5 / 12000$, esto hace suponer un conflicto al establecer la proporcionalidad; no obstante, el estudiante, en su división, plantea correctamente su solución.

RESPUESTAS QUE NO OBTUVIERON CRÉDITO

Ejemplos		Sexo y nivel educativo
A	Impuestos en zeds: $\frac{4800}{1200} \dots\dots\dots$ 4.68	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria general
B	Impuestos en zeds: $\$96$ $4,800 - 100\%$ $\times \rightarrow 2\% = 96$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria general
C	Impuestos en zeds: $4,800$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria técnica
D	Impuestos en zeds: 1200 zeds	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria técnica
E	Impuestos en zeds: $a demás un 2.5\%$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Telesecundaria
F	Impuestos en zeds: $2,500$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato general
G	Impuestos en zeds: 11125	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato general
H	Impuestos en zeds: 250	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Bachillerato tecnológico

Ejemplos		Sexo y nivel educativo
I	Impuestos en zeds:1200.....	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Bachillerato tecnológico
J	Impuestos en zeds:4802.5.....	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Profesional técnico
K	Impuestos en zeds: 117,500.....	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Profesional técnico

Observaciones sobre las respuestas que NO OBTUVIERON CRÉDITO

Las dificultades mostradas en estas respuestas son de distinta índole. El profesor podrá identificar, por ejemplo, casos en los que no se logra ubicar el auto indicado (*K*) o que no se sigue el procedimiento de manera correcta. Son distintos errores los que permitirán dirigir de mejor manera sus estrategias didácticas a la hora de enseñar un contenido (el concepto de porcentaje) en apariencia sencillo, pero que requiere el dominio de fracciones, decimales, razones y proporciones.

En *A*, la respuesta muestra una clara aplicación de proporcionalidad en el planteamiento; sin embargo, no llega a concretar su respuesta correctamente. Algo similar sucede con *B*, en este caso su procedimiento es correcto, pero el dato del porcentaje es impreciso: 2 en lugar de 2.5. En los ejemplos *D* e *I*, los estudiantes emplean un factor de 0.25, lo que hace suponer que confunden 2.5% con 25%. En *H* se escribe el porcentaje en notación decimal, con errores en el procedimiento (2.5×100), al igual que en *F* (2.5×1000).

Cochera

En la categoría “básicos” de un fabricante de cocheras, hay modelos con una sola ventana y una puerta.

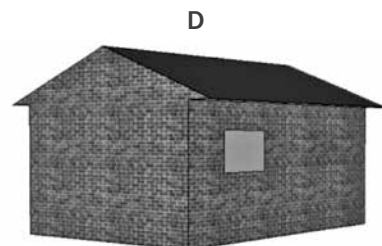
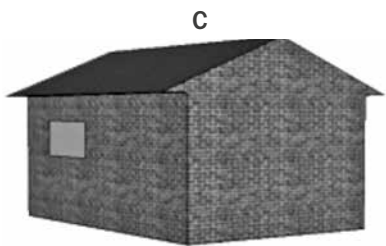
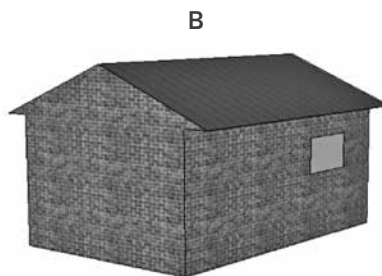
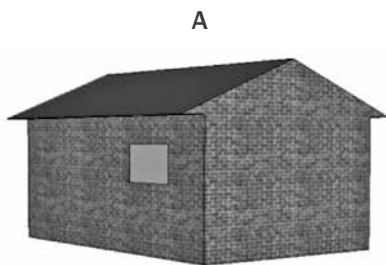
Jorge elige el siguiente modelo de la categoría “básicos”. Aquí se muestra la posición de la ventana y de la puerta.



Pregunta 1. Cochera

Las siguientes ilustraciones muestran diferentes modelos “básicos” vistos desde atrás. Sólo una de estas ilustraciones corresponde al modelo anterior que Jorge eligió.

¿Cuál modelo eligió Jorge? Encierra en un círculo A, B, C o D.



Proceso	Contenido	Contexto	Nivel	Puntaje
Interpretar	Espacio y forma	Laboral	1	419.6

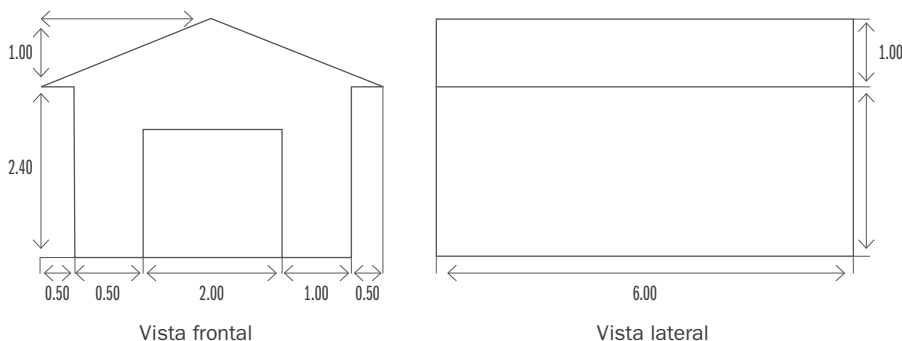
Comentario de PISA

En la pregunta 1 se solicita a los estudiantes que identifiquen un dibujo de una construcción vista desde atrás, proporcionándole la vista del frente. El diagrama debe ser interpretado con relación a la posición del mundo real “visto desde atrás”. La tarea de una rotación mental como ésta puede solucionarse haciendo uso de una visualización espacial intuitiva. Otras personas necesitarán explicitar un proceso de razonamiento. Estas últimas pudieran analizar las posiciones relativas de múltiples elementos (puerta, ventana, alguna de las esquinas), descartando las alternativas una a una. Otros tal vez hagan uso de dibujos para poder rotar físicamente la imagen. Estos son sólo algunos ejemplos de las diferentes maneras en que los estudiantes pueden enfrentar las preguntas de PISA: en este caso, el razonamiento explícito para algunos es intuitivo para otros.

Respuesta correcta: C.

Pregunta 2. Cochera

Los siguientes planos muestran las dimensiones, en metros, de la cochera que Jorge eligió.



Nota: El dibujo no está a escala.

El techo se conforma de dos secciones rectangulares idénticas.

Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.

.....

.....

.....

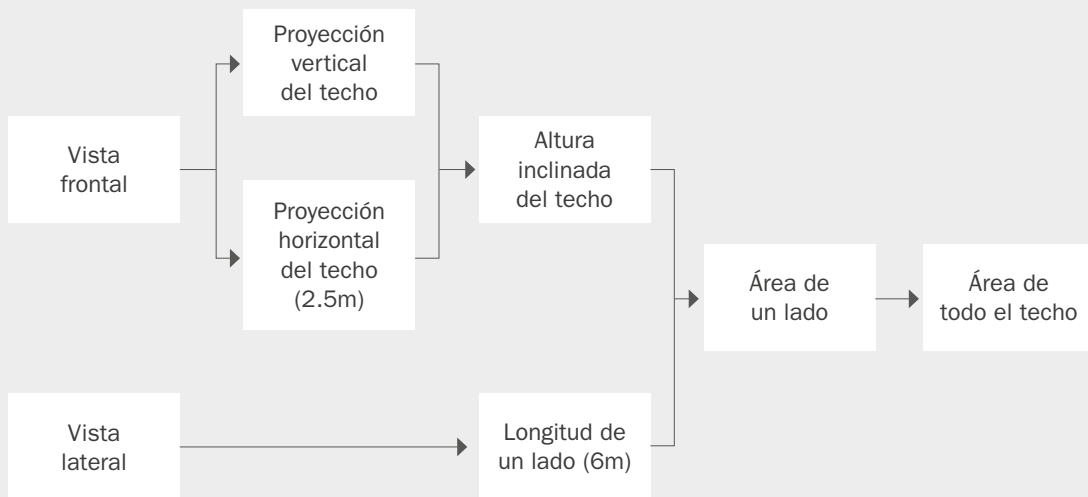
.....

Proceso	Contenido	Contexto	Nivel	Puntaje
Emplear	Espacio y forma	Laboral	6	687.3

Comentario de PISA

La pregunta 2 requiere de un cálculo complejo, con múltiples referencias al uso de diagramas matemáticos, además de conocer el teorema de Pitágoras. Hay un alto nivel de demanda cognitiva dado que se requiere una comprensión y un uso exacto de la información de la vista frontal y lateral que se presenta en la pregunta. Es un reto para el estudiante la conciliación del aparente 1.0 m de altura del techo desde la vista lateral con la vista frontal. El plan mostrado en la figura 1 muestra la estructura básica para obtener la solución de la pregunta. El estudiante debe ser capaz de diseñar su propio plan para obtener la información solicitada a partir de los datos presentados.

Figura 1. Plan para responder a la pregunta 2 de la unidad Cochera

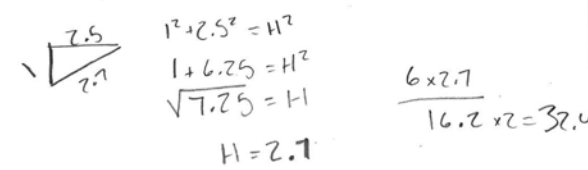
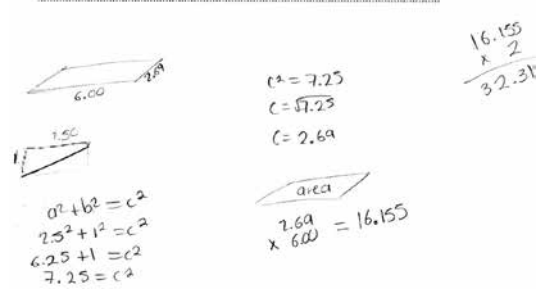


Las respuestas a esta pregunta pueden recibir crédito total, parcial o no obtener crédito. Para obtener crédito total, el estudiante debe contestar cualquier valor entre 31 y 33, ya sea que que apoye su respuesta en el uso del teorema de Pitágoras (aunque sólo incluya algunos elementos que indiquen el uso de dicho método) o que no muestre el trabajo realizado. No se requiere la inclusión de las unidades (m^2).

Para obtener crédito parcial existen dos posibilidades. La primera sucede cuando el trabajo del estudiante muestra un uso adecuado del teorema de Pitágoras, pero comente algún error de cálculo, usa una longitud incorrecta, o no duplica el área del techo. La segunda posibilidad considerada es que el trabajo del estudiante no evidencie el uso del teorema de Pitágoras, pero haga uso de un valor razonable para el ancho de una sección del techo (por ejemplo, cualquier valor de 2.6 a 3) y completa el resto del cálculo de forma correcta.

Las respuestas que no obtienen crédito son aquellas en las que no se da una contestación o en las que, por ejemplo, la estimación del ancho de una de las secciones del techo está fuera del rango aceptable, que va de 2.6 a 3.

RESPUESTAS QUE OBTUVIERON CRÉDITO TOTAL

	Ejemplos	Sexo y nivel educativo
A	<p>La superficie total es de 32.4 m^2, un lado del techo mide 7.7 mientras lo largo mide 6 multiplicas eso $\times 7$ y da un total de 32.4 m^2</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Secundaria general
B	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$2(2.69 \times 6) = 32.28 \text{ m}^2$</p> <p>$2.50^2 + 1.00^2 = h^2$ $h = 2.69$</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Secundaria general
C	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$a^2 + b^2 = c^2$ $(2.50)^2 + (1.00)^2 = c^2$ $6.25 + 1 = 7.25$ $\sqrt{7.25} = 2.692$ $\times 2 = 5.3851$ $5.3851 \times 6 = 32.3109$ Superficie total del techo = 32.3109</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hombre ▪ Secundaria técnica
D	<p>La superficie total es de 32.3109 aproximadamente</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Secundaria técnica
E	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$1.00^2 + 2.50^2 = 7.25$ $= 2.69 \times 6.00 = 16.14 \times 2 = 32.28$</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mujer ▪ Telesecundaria

	Ejemplos	Sexo y nivel educativo
F	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$2^2 + 2.5^2 = x^2 = 7.25$ $x = \sqrt{7.25} = 2.69$ $6 \times 2.69 = 16.14$</p> <p>$16.14 \times 2 = 32.28$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Hombre • Bachillerato general
G	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$R = 32.4$... primero saque el lado mas corto del rectangulo con el teorema de pitagoras, despues saque el area de un rectangulo y al final la multiplique por dos... para sacar el area total</p> <p>$c^2 = 6.25 + 1$ $A = 6 \times 2.7 = 16.2$</p> <p>$c^2 = 7.25$ $16.2 \times 2 = 32.4$</p> <p>$c = \sqrt{7.25}$</p> <p>$c = 2.692$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Mujer • Bachillerato general
H	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>la superficie es $[32.31099984]$</p> <p>se saca la hipotenusa formada en la vista frontal del techo, se multiplica por lo largo del techo (vista lateral) y se duplica para tener la superficie</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Hombre • Bachillerato tecnológico
I	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$2.5^2 + 1^2 = 6.25 + 1 = \sqrt{7.25} = 2.69$</p> <p>$2.69 \times 6 = 16.14$</p> <p>$16.14 \times 2 = 32.28$</p> <p>$(32.25)$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Hombre • Profesional técnico

Observaciones sobre las respuestas que obtuvieron CRÉDITO TOTAL

Tal y como se solicita en la propia pregunta, estas respuestas muestran las operaciones y el procedimiento seguido para alcanzar el resultado. El grado de complejidad de la tarea solicitada la ubica en el nivel más alto que mide PISA; sin embargo, los ejemplos mostrados evidencian la capacidad de estos estudiantes para utilizar, con sus estilos particulares, el teorema de Pitágoras. Los distintos procedimientos para alcanzar la respuesta permiten al docente identificar caminos y rutas para contrastarlas con las que sus estudiantes están utilizando en el salón de clase.

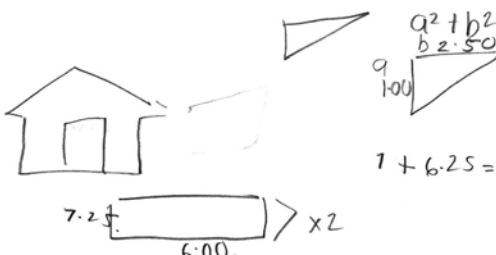
Estos ejemplos de respuesta dejan ver la creatividad que ponen en juego los estudiantes en sus procedimientos. Se puede destacar la riqueza de las estrategias de solución en tres aspectos singulares: el uso de figuras que auxilian el planteamiento, algoritmos elaborados además de detallados y la descripción escrita del procedimiento.

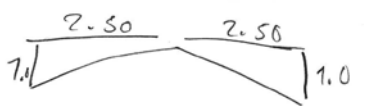

En A y D los estudiantes emplean un triángulo rectángulo para delimitar los catetos y a partir de ahí calcular la hipotenusa. El ejemplo A tiene también similitud con los ejemplos G y H, en donde se describe el procedimiento, resultado de la instrucción del reactivo “Muestra tus operaciones”. Se destaca el ejemplo H, donde se redacta de manera muy detallada y precisa la secuencia del cálculo, independientemente de que se omite la parte numérica.

De igual forma, los ejemplos A, C, D y G, manifiestan una característica particular en el procedimiento: hacen un desarrollo de operaciones en columna, o bien, hacen un desarrollo por filas, lo cual denota un orden en su organización. En particular, en C y D, se recurre a la representación simbólica del teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$, lo cual otorga evidencia de un manejo completo del tema. En cambio los ejemplos B, E, F e I, muestran un procedimiento de cálculo lineal, referido este término a la disposición de la secuencia de cálculo.

RESPUESTAS QUE OBTUVIERON CRÉDITO PARCIAL

(Con uso adecuado del teorema de Pitágoras, pero con algún error)

	Ejemplos	Sexo y nivel educativo
A	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>Volumen = l x a x h $6.00 \times 1.00 \times 2.69 = 16.14$</p> <p>Teorema de pitágoras</p> $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $c = \sqrt{1^2 + 2.25}$ $c = \sqrt{1 + 2.25}$ $c = \sqrt{3.25}$ $c = 2.69$ <p>$0.50 + 1.00 + 2.00 + 1.00 + 0.50 = 6$</p>	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria general
B	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>LA SUPERFICIE ES 87m²</p>  <p>$a^2 + b^2 = c^2$</p> $1 + 6 \cdot 2.5 = 7 \cdot 2.5$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria general

	Ejemplos	Sexo y nivel educativo
C	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>Primero le sacas la hipotenusa para eso tienes que multiplicar los catetos cuadradamente y luego se suman los cuadrados y te da el lado que es 7.25 lo multiplicas por 2 y te da la superficie 14.5.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Hombre • Secundaria técnica
D	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>La Superficie total del techo es 5.38 debido que al complementarlo se forman 2 triángulos rectángulos y para obtener dichas medidas hice lo siguiente:</p>  <p>FORMULA: $a^2 + b^2 = c$ $\sqrt{c^2} = c$</p> <p>- El 2.50 lo elevé al cuadrado obteniendo 6.25 - Elevé al cuadrado el 1 obteniendo 1 - Sumé ambas cantidades y obtuve 7.25 - Al resultado le saqué raíz cuadrada y así obtuve 2.69 lo multipliqué por 2 por que son 2 lados que conforman el triángulo y así lo obtuve el 5.38</p> <p><small>C26-PM6B-E Página 43</small></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Hombre • Telesecundaria
E	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$h = \sqrt{1^2 + 2.5^2} = h \sqrt{1 + 6.25} = h = 2.69$ $2.69 + 2.69 + 5 = 10.38$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Mujer • Bachillerato general
F	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$c^2 = a^2 + b^2$ $c = 2.692$ ST = 9.384 $c^2 = 1^2 + 2.5^2$ $c^2 = 1 + 6.25$ $2c = 5.384$ $c^2 = 7.25$ $\sqrt{\quad}$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Mujer • Bachillerato general
G	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>16.152 m²</p>  <p>x = longitud corta de una sección rectangular del techo</p> <p>$x^2 = (2.50)^2 + (2.00)^2$ 2.692 $x^2 = 6.25 + 4$ $\frac{x}{6}$ $x^2 = 10.25$ 16.152 $x = 2.692$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Hombre • Bachillerato general

Ejemplos		Sexo y nivel educativo
H	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> $a^2 + b^2 = c^2$ $1^2 + 3^2 = 2.50^2$ $1 + 9 = 6.25 = 2.5$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato tecnológico
I	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> $c^2 + c^2 = H^2 = 4 + 6.9 = \sqrt{10.9} = 2.7$ <p>que es la hipotenusa $2.7 \times 6 = 16.2$</p>	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Profesional técnico

Observaciones sobre las respuestas que obtuvieron CRÉDITO PARCIAL

(Con uso adecuado del teorema de Pitágoras pero con algún error)

Las respuestas mostradas en esta ocasión comprueban que, a pesar de poseer conocimiento sobre el teorema de Pitágoras, en algunos casos el procedimiento seguido por los estudiantes es incompleto o quizá contiene distintos errores. Estos ejemplos son particularmente ilustrativos para el docente, pues puede identificar las áreas hacia las que puede dirigir sus estrategias didácticas.

En particular, en casi todos los casos se logra calcular correctamente la hipotenusa. A pesar de que los estudiantes no evidencian dificultades cognitivas con el teorema de Pitágoras, su resultado no es empleado adecuadamente para el cálculo del área solicitada.

En A, la respuesta presenta una confusión conceptual con el área y el volumen. En B y C se distingue la aplicación correcta de la suma de los cuadrados de los catetos, y se obtiene como resultado el cuadrado de la hipotenusa; sin embargo, no se culmina con el radical de este resultado. Este dato se emplea de distintas maneras. En B se utiliza para hacer el cálculo del área de las dos secciones del techo. En C este mismo resultado se multiplica por dos, con esto se asume que se está confundiendo la hipotenusa con el área de una sección del techo. Es destacable este ejemplo dado que en la respuesta se redacta el procedimiento, dejando de lado en gran medida la parte numérica.

En D, E, F, G, e I, se calcula correctamente la hipotenusa. Estos resultados también tienen diferentes tratamientos. En D y F emplean este valor como área y lo multiplican por dos para obtener su resultado. Se destaca D, en el que se recurre a la redacción del procedimiento, así como al uso de figuras auxiliares. En el ejemplo E sucede algo similar que en D, además de que se adiciona un cinco del que no se muestran evidencias de cómo se obtiene.

En G e I, se muestran resultados muy cercanos a lo solución correcta, ya que los estudiantes no presentan dificultades en el uso del dato de la hipotenusa para calcular el área, el único detalle es que sólo ven una parte del área, es decir, falta multiplicar por dos. Una particularidad de F es que se redondea a una cifra significativa el resultado del radical.

Finalmente, en *H* se plantea el teorema de Pitágoras, pero se infiere que se cometió un error en la suma de las acotaciones para obtener el cateto y así obtener la hipotenusa, ya que se incurre en el error de interpretar la hipotenusa como área.

RESPUESTAS QUE OBTUVIERON CRÉDITO PARCIAL

(Sin evidencia del uso del teorema de Pitágoras, pero con resultado aproximado al correcto)

Ejemplos		Sexo y nivel educativo
A	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$5.40 \times 6.00 = 32.4 \text{ m}^2$ de superficie.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria técnica
B	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$6 \times 3 = 18 \times 2 = 36$</p> <p>6 es la mitad lateral, 3 del ancho aproximado de la teja, multiplicado por dos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato general
C	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ \hline 36 \end{array}$</p>	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Profesional técnico

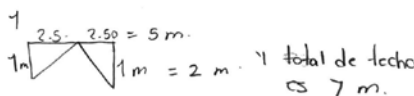


Observaciones sobre las respuestas que obtuvieron CRÉDITO PARCIAL

(Sin evidencia del uso del teorema de Pitágoras, pero con resultado aproximado al correcto)

Estos ejemplos son particularmente interesantes. A pesar de que no hay evidencia del uso del teorema de Pitágoras, los estudiantes utilizaron un valor razonable para el ancho de uno de los segmentos del techo. Lo que permite inducir un razonamiento adecuado en términos de la información proporcionada.

En los casos *B* y *C*, las soluciones mostradas se encuentran dentro del rango establecido en la codificación; obsérvese que los alumnos recurren a una solución práctica, en donde queda una clara evidencia de que intuitivamente aplican una relación entre los lados del triángulo y el lado faltante para calcular el área. El valor didáctico de estos ejemplos radica en que los estudiantes no muestran evidencia de una adquisición mínima del concepto del teorema de Pitágoras, aunque hay bases cognitivas que pueden ser aprovechadas para la construcción de conocimientos. En este sentido, es menester del docente brindar, en estos casos, herramientas suficientes para la construcción de conceptos.

RESPUESTAS QUE NO OBTUVIERON CRÉDITO

	Ejemplos	Sexo y nivel educativo
A	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>Se suma 1 m de altura del techo que es de una sección y después 2.50 m de largo que es de un solo lado.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria general
B	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$1.00 + 2.40 \times 2.50 = 8.5$ es la superficie total del techo.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Secundaria general
C	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>4.50 metros</p>  	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Secundaria técnica
D	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$2.50 \times 600 = 1.50$ cm</p>	<ul style="list-style-type: none"> Hombre Secundaria técnica
E	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$1 + 2.40 + 1.6 + 1.6 + 1.4 + 1 = 10$, sume todos los lados del techo.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Telesecundaria
F	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$6.00 \times 2.50 = 15 + 15 = 30$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato general
G	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>$2.00 + 1.00 = 3.00$</p>	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato general

Ejemplos		Sexo y nivel educativo
H	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> $6.00 \times 2.50 + 7.00 = 9.50 \times 2 = 19.00$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato general
I	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> $\text{Superficie} = 1.00 \times 2.50$ $\text{Superficie} = 2.50 \times 2.40$ $\text{Superficie} = 6.00$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Bachillerato general
J	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>El techo cada uno de sus lados es igual entonces saque el área de uno de los lados y después multiplique por 2</p> $1.00 \times 6.00 = 6.00 \times 2 = 12.00 \text{ m}$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Profesional técnico
K	<p>Calcula la superficie total del techo. Muestra tus operaciones.</p> <p>Después de leer está la base en el perfil de gablete la misma área lateral a faja y hacer el sacar a exala</p> $\begin{array}{r} 1.00 \\ \times 2.40 \\ \hline 6.00 \end{array}$	<ul style="list-style-type: none"> Mujer Profesional técnico

Observaciones sobre las respuestas que NO OBTUVIERON CRÉDITO

Como puede apreciarse en los ejemplos seleccionados, existe un esfuerzo notorio por parte de los estudiantes para hacer frente a este tipo de problemas; sin embargo, se evidencia un limitado repertorio de elementos metodológicos para encontrar una solución acorde con lo requerido, en este caso, el uso del teorema de Pitágoras. Incluso, en algunos casos, hay confusión de términos al momento de ser aplicados en un problema en concreto, como en el caso del ejemplo B, en el que el estudiante confunde la obtención del perímetro con el área.

En los ejemplos A, C, E y F, los estudiantes desarrollan sumas, lo que hace suponer que hay confusión del concepto de área con el de perímetro. En A, se recurre a una figura auxiliar; en el supuesto de que se esté calculando el perímetro, hacen falta dos elementos para concretar bien este cálculo. Un análisis similar se puede obtener de los ejemplos C, E y F, el cual se deja al lector para la obtención de conclusiones personales. En los ejemplos E, I y K se emplea el valor de la altura 2.4, por lo que se presume que hay confusión en los elementos que conforman el techo, haciendo la altura parte de este. Rescatables, desde el punto de vista metodológico, son los ejemplos J y K por la redacción de su procedimiento. Nótese que en el ejemplo K se tiene claro el procedimiento genérico que se debe seguir al describir que son dos áreas las que hay que considerar.



BIBLIOGRAFÍA

- Agencia Educación. (2013). *PISA. Competencias matemáticas: un requisito para la sociedad de la información. Marco de evaluación, preguntas y ejemplos de respuestas de la prueba*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). (2013). *México en PISA 2012*. México: INEE.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD). (2013). *Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Volumen I: Resultados y contexto*. Madrid: Autor. Consultado el 21 de octubre de 2014 desde: <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012volumen-1-24-02-2014.pdf?documentId=0901e72b8189abb8>
- Organization for Economic Co-operation and Development (OECD). (2014). *PISA 2012 results: What students know and can do. Student performance in mathematics, reading and science (Vol. I. Edición revisada)*. París: OECD Publishing. Consultado el 21 de octubre de 2014 desde: <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-volume-I.pdf>

DIRECTORIO

JUNTA DE GOBIERNO

Sylvia Irene Schmelkes del Valle

Consejera Presidenta

Eduardo Backhoff Escudero

Consejero

Gilberto Ramón Guevara Niebla

Consejero

Margarita María Zorrilla Fierro

Consejera

Teresa Bracho González

Consejera

TITULARES DE UNIDAD

Francisco Miranda López

Unidad de Normatividad y Política Educativa

Jorge Antonio Hernández Uralde

Unidad de Evaluación del Sistema Educativo Nacional

Agustín Caso Raphael

Unidad de Información y Fomento de la Cultura de la Evaluación

Luis Castillo Montes

Unidad de Planeación, Coordinación y Comunicación Social

Miguel Ángel de Jesús López Reyes

Unidad de Administración

Luis Felipe Michel Díaz

Contralor Interno

Dirección General de Difusión y Fomento de la Cultura de la Evaluación

Annette Santos del Real

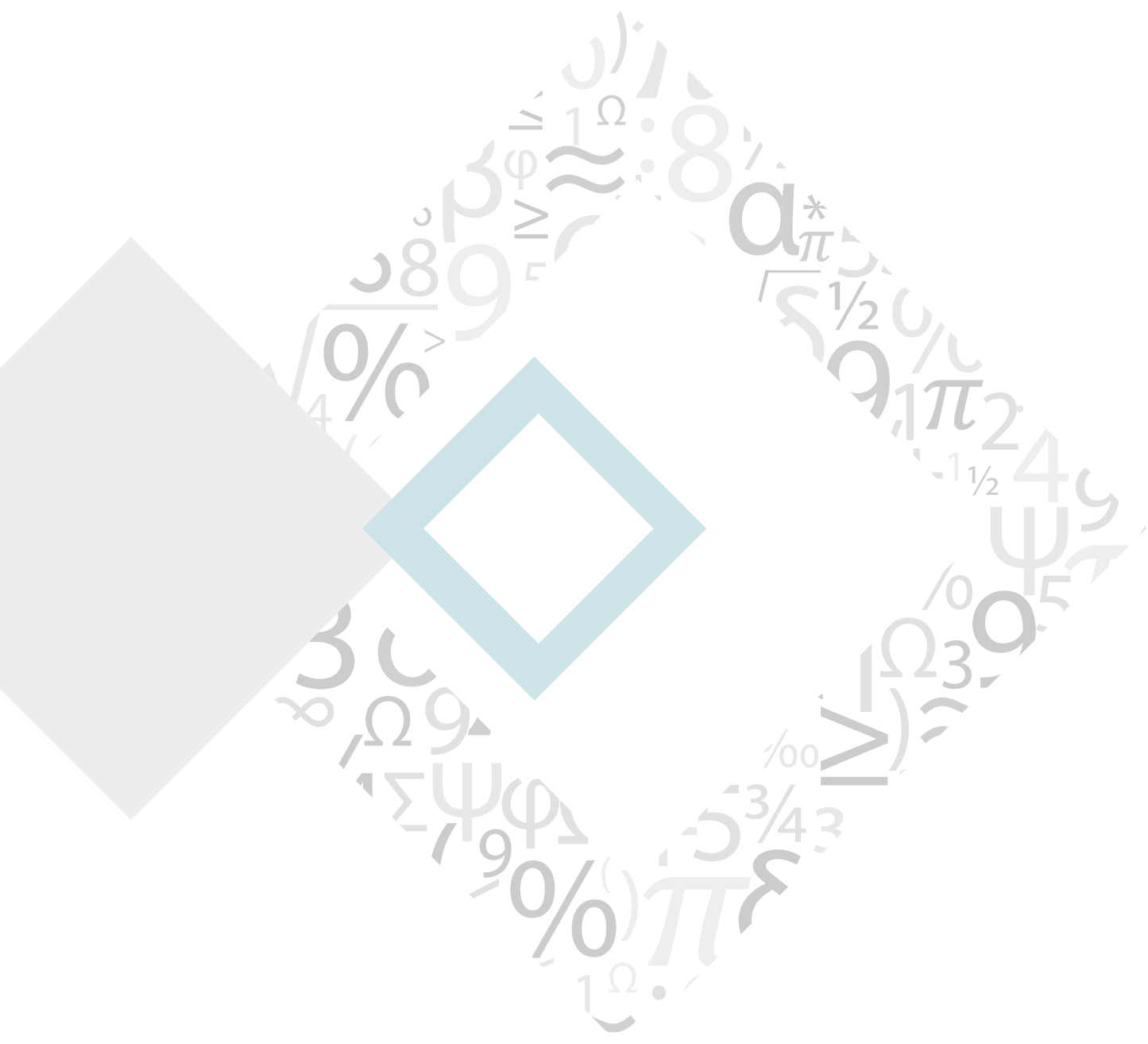
Dirección de Difusión y Publicaciones

Alejandra Delgado Santoveña



Materiales
para docentes

LAS TAREAS DE MATEMÁTICAS EN PISA 2012
Es una publicación digital
del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
En su formación se emplearon la familias tipográficas
ITC Franklin Gothic Std y Syntax LT Std.



Descargue una copia digital gratuita



Comuníquese con nosotros



Visite nuestro portal